

53. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, 17–18 април 2004 г.

Задача 9.1. Да се намерят стойностите на реалния параметър a , за които уравнението

$$\sqrt{(4a^2 - 4a - 1)x^2 - 2ax + 1} = 1 - ax - x^2$$

има точно две решения.

Сава Гроздев, Светлозар Дойчев

Задача 9.2. Върху бедрата AC и BC на равнобедрения $\triangle ABC$ са взети съответно точки A_1 и B_1 така, че $4AA_1 \cdot BB_1 = AB^2$. Да се докаже, че ъглополовящите на $\angle AA_1B_1$ и $\angle BB_1A_1$ се пресичат върху правата AB .

Сава Гроздев, Светлозар Дойчев

Задача 9.3. Да се докаже, че

$$\frac{9}{10} \leq \frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} < 1,$$

където a , b и c са положителни числа така, че $a + b + c = 1$.

Сава Гроздев, Светлозар Дойчев

Задача 9.4. Да се реши в цели числа уравнението

$$x^3 + 10x - 1 = y^3 + 6y^2.$$

Сава Гроздев, Светлозар Дойчев

Задача 9.5. Даден е квадрат $n \times n$ ($n \geq 2$), съставен от n^2 единични квадратчета, всяко от които е оцветено в бяло или черно така, че за всеки правоъгълник (от най-малко четири квадратчета) в квадрата поне две от единичните квадратчета в четирите му ъгъла са разноцветни. Да се намери възможно най-голямата стойност на n .

Сава Гроздев, Светлозар Дойчев

Задача 10.1. Дадени са уравненията

$$[x]^3 + x^2 = x^3 + [x]^2 \quad \text{и} \quad [x^3] + x^2 = x^3 + [x^2],$$

където $[t]$ е най-голямото цяло число, ненадминаващо t . Да се докаже, че:

- целите числа са единствените решения на първото уравнение;
- съществува решение на второто уравнение, което не е цяло число.

Сава Гроздев, Светлозар Дойчев

Задача 10.1. Да се реши неравенството $\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{2x^2 - 3} + x\sqrt{3} > 0$.

Петър Бойваленков

Задача 10.2. Даден е $\triangle ABC$ с медицентър M .

а) Да се докаже, че $\cotg \angle AMB = \frac{BC^2 + CA^2 - 5AB^2}{12S_{ABC}}$

б) Да се докаже, че $\cotg \angle AMB + \cotg \angle BMC + \cotg \angle CMA \leq -\sqrt{3}$.

Петър Бойваленков

Задача 10.3. В едно предприятие има $m \geq 1$ мъже и $j \geq 1$ жени, $j < 2004$. Всеки пратил на всеки (освен на себе си) по една картичка. Оказало се, че всички картички, пратени от мъже, са колкото картичките, пратени от жени на жени. Намерете всички възможни стойности на j .

Ивайло Кортезов

Задача 10.4. Нека $f(x) = (a^2 + 4a + 2)x^3 + (a^3 + 4a^2 + a + 1)x^2 + (2a - a^2)x + a^2$, където a е реален параметър.

а) Да се докаже, че $f(-a) = 0$.

б) Да се намерят всички стойности на a , за които уравнението $f(x) = 0$ има три различни реални положителни корена.

Иван Ланджеев

Задача 10.5. Нека O е център на описаната окръжност за $\triangle ABC$, M е средата на страната AB , а G е медицентърът на $\triangle ACM$. Ако $OG \perp CM$, да се докаже, че $\triangle ABC$ е равнобедрен.

Ивайло Кортезов

Задача 10.6. Даден е граф G с 10 върха и 26 ребра. Да се докаже, че G съдържа поне 4 триъгълника.

Иван Ланджеев

Задача 11.1. За кои стойности на $x \in (-\pi, \pi)$ числата $2^{\sin x}$, $2 - 2^{\sin x + \cos x}$ и $2^{\cos x}$ са последователни членове на геометрична прогресия?

Емил Колев

Задача 11.2. Допирателните към описаната около остроъгълния $\triangle ABC$ окръжност, построени в точките A и B , се пресичат в точка D . Ако M е среда на AB , докажете, че $\angle ACM = \angle BCD$.

Емил Колев

Задача 11.3. Нека $N = mn - n + 1$, където $m \geq 3$ и $n \geq 2$ са естествени числа. Да се докаже, че ако в група от N човека измежду всеки m има двама, които се познават, то съществува човек, който познава поне n от останалите членове на групата. Вярно ли е твърдението при $N < mn - n + 1$?

Александър Иванов

Задача 11.4. Даден е триъгълник ABC . Точките D и E са от симетралите съответно на страните AB и BC , като D е вътрешна за триъгълника ABC ,

а E – външна и $\sphericalangle ADB = \sphericalangle CEB$. Ако AE пресича отсечката CD в точка O докажете, че триъгълникът ACO и четириъгълникът $DBEO$ имат равни лица.

Емил Колев

Задача 11.5. Нека a , b и c са естествени числа, поне едно от които е взаимнопросто с останалите две. Да се докаже, че съществуват естествени числа x , y и z , за които $x^a = y^b + z^c$.

Александър Иванов

Задача 11.6. Във вътрешността на триъгълник ABC с лице равно на 1 е избрана произволна точка, която е съединена с върховете му. След това в един от получените три триъгълника отново е избрана произволна точка и е съединена с върховете му. На всяка стъпка се избира произволна точка от вътрешността на някои от получените до момента триъгълници и тя се свързва с върховете на този триъгълник. Да означим с n броя на избраните точки.

а) Да се докаже, че триъгълникът ABC е разделен на $2n+1$ триъгълника.

б) За всеки два триъгълника от разделянето с обща страна е пресметната сумата от лицата им. Да се докаже, че максималната от тези суми е не по-малка от $\frac{2}{2n+1}$.

Александър Иванов

Задача 12.1. Да се намерят всички цели числа a , b и c , за които

$$2^a + 8b^2 - 3^c = 283.$$

Олег Мушкаргов, Николай Николов

Задача 12.2. Да се намерят стойностите на реалния параметър a , за които най-голямата стойност на функцията $f(x) = \frac{ax-1}{x^4-x^2+1}$ е равна на 1.

Олег Мушкаргов, Николай Николов

Задача 12.3. Равнина разполовява обема на триъгълна пирамида $ABCD$ и пресича ръбовете AB и CD в точки M и N така, че $\frac{AM}{BM} = \frac{CN}{DN} \neq 1$. Да се докаже, че равнината минава през средите на ръбовете AC и BD .

Олег Мушкаргов, Николай Николов

Задача 12.4. Нека E е пресечната точка на диагоналите AC и BD на вписан в окръжност четириъгълник $ABCD$. Ако $AC = BC$, $AD = 5$, $BE = 12$ и $DE = 3$, да се намери $\sphericalangle BCD$.

Олег Мушкаргов, Николай Николов

Задача 12.5. Множество A от естествени числа, по-малки от 2 000 000, ще наричаме "добро ако $2000 \in A$ и a дели b за всеки $a, b \in A$, $a < b$.

а) Колко най-много елемента може да има едно "добро" множество?

б) Да се намери броят на "добрите" множества с максимален брой елементи.

Олег Мушкарров, Николай Николов

Задача 12.6. Да се намерят всички неконстантни полиноми $P(x)$ и $Q(x)$ с реални коефициенти такива, че

$$P(x)Q(x+1) = P(x+2004)Q(x)$$

за произволно реално число x .

Олег Мушкарров, Николай Николов